

# 拡張されたカタラン数の合成積について

On convolutions of extended Catalan numbers

田川 裕之\*

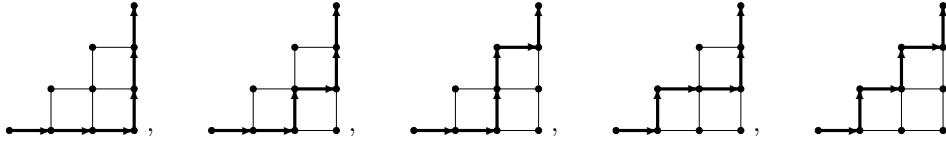
Hiroyuki TAGAWA  
(和歌山大学教育学部)

2019 年 10 月 2 日受理

本稿では, 拡張されたカタラン数の合成積を超幾何級数の等式を利用して証明することを目的とする。なお, 系として, 超幾何級数の新しい等式及び既知の等式の拡張となる偶数項のみからなるカタラン数の合成積が得られる。

## 1 序

カタラン数  $C_n$  は, 座標平面上の  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  への対角線  $y = x$  を越えてしまわない右向き Step  $(1, 0)$ , i.e.  $\rightarrow$ , と上向き Step  $(0, 1)$ , i.e.  $\uparrow$ , を利用した最短路の個数として定義される。例えば,  $n = 3$  の場合には, 最短路は



の 5 通りあるので,  $C_3 = 5$  である。なお,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  の場合のカタラン数  $C_n$  は

$$C_0 = 0, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42$$

であり, 一般に,  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  となることが知られている。ただし,  $\binom{m}{n}$  は, 二項係数, i.e.  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  とする。カタラン数は, 上述の最短路を用いた意味づけの他にも,  $n+1$  人でのトーナメント表の種類,  $n+2$  角形の三角形分割の個数等, 様々な意味づけが知られており, 拡張も多数行われている (cf. [4], [7])。

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  に対して,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  で定義される数列  $\{c_n\}$  は,  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  の合成積もしくは畳み込み (convolution) と呼ばれている。例えば, 実数上の 1 変数多項式環  $\mathbb{R}[x]$  の元  $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  と  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  の積  $f(x)g(x)$  は  $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) x^n$  と記述でき,  $x^n$  の係数は  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  の合成積となっている。また, 連続関数に対する合成積についても積分を用いて定義されており, 確率速度, 線形システム, 統計学等でも利用されている。特に, カタラン数の合成積については,  $r \geq 1, n \geq 0$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r C_{i_k} = \frac{r(2n+r-1)!}{n!(n+r)!} \quad (1)$$

となることが知られている (cf. [1], [6])。以下,  $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} (n \geq 0)$  に対して, ポツホハマー記号  $(a)_n$  を

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} (a+i) & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

とおき,  $r \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \in \mathbb{C}$  に対して, 超幾何級数  ${}_rF_{r-1} \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \end{matrix}; z \right)$  を

$${}_rF_{r-1} \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \prod_{i=1}^r (a_i)_k}{k! \prod_{i=1}^{r-1} (b_i)_k}$$

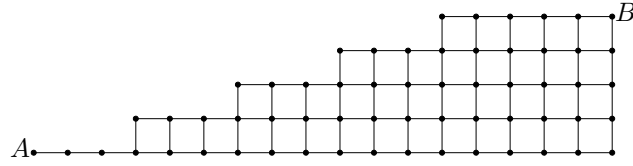
\*本研究の一部は, JSPS 科研費 JP16K05060 の助成を受けたものです。

で定義する。ただし,  $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合,  $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合を表すこととする。

本稿では,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $m \geq 1$  に対する数列  $\left\{ \frac{(a)_{(m+1)n}}{n!(a+1)_{mn}} \right\}$  の合成積の等式を超幾何級数を利用して証明し, 系として, ある種の拡張されたカタラン数  $C_n(m, s)$ , 及び偶数項のみのカタラン数  $C_{2n}$  の合成積の等式を導くことを目的とする。

## 2 拡張されたカタラン数

以下,  $m \geq 1$ ,  $n, s \geq 0$  に対して, 座標平面上の  $(0, 0)$  から  $(mn + s, n)$  への直線  $y = \frac{x}{m}$  を越えてしまわない右向き Step  $(1, 0)$  と上向き Step  $(0, 1)$  を利用した最短路の個数を  $C_n(m, s)$  とおく。例えば,  $C_4(3, 5)$  は, 次の  $A$  から  $B$  への最短路の個数である。



特に,  $C_n(1, 0) = C_n$  であり,  $C_n(m, s)$  については, 一般に次が成立する。

**Lemma 2.1.**  $m \geq 1$ ,  $n, s \geq 0$  に対して

$$C_n(m, s) = \frac{(s+1)((m+1)n+s)!}{n!(mn+s+1)!} \left( = \frac{(s+1)_{(m+1)n}}{n!(s+2)_{mn}} \right). \quad (2)$$

**Proof.** (2) の右辺を  $\tilde{C}_n(m, s)$  とおき,  $C_n(m, s) = \tilde{C}_n(m, s)$  を  $n$  に関する帰納法のもとで  $s$  に関する帰納法を用いるという 2 段の帰納法で証明する。まず,  $C_n(m, s)$  の定義から

$$C_0(m, s) = 1, \quad (3)$$

$$C_n(m, 0) = C_{n-1}(m, m) \quad (n \geq 1), \quad (4)$$

$$C_n(m, s) = C_n(m, s-1) + C_{n-1}(m, m+s) \quad (n, s \geq 1) \quad (5)$$

である。 $n = 0$  のときには,  $C_0(m, s) = 1 = \tilde{C}_0(m, s)$  となり成立している。 $n - 1$  まで成立したと仮定する ( $n \geq 1$ )。  $n \geq 1$  に注意すると,  $s = 0$  の場合には, (4) と  $n$  についての帰納法の仮定から

$$C_n(m, 0) = C_{n-1}(m, m) = \tilde{C}_{n-1}(m, m) = \frac{(m+1)((m+1)(n-1)+m)!}{(n-1)!(m(n-1)+m+1)!} = \frac{((m+1)n)!}{n!(mn+1)!} = \tilde{C}_n(m, 0)$$

となり成立している。 $s - 1$  まで成立したと仮定する ( $s \geq 1$ )。このとき, (5) と,  $n$  についての帰納法の仮定, 及び  $s$  についての帰納法の仮定から

$$C_n(m, s) = C_n(m, s-1) + C_{n-1}(m, m+s) = \tilde{C}_n(m, s-1) + \tilde{C}_{n-1}(m, m+s) \quad (6)$$

$$= \frac{s((m+1)n+s-1)!}{n!(mn+s)!} + \frac{(m+s+1)((m+1)(n-1)+m+s)!}{(n-1)!(m(n-1)+m+s+1)!} = \tilde{C}_n(m, s) \quad (7)$$

となることが分かる。以上により, (2) が 2 段の帰納法により証明された。  $\square$

なお, 結果的に,  $C_n(m, 0)$ ,  $C_m(p-1, r-1)$  は Fuss-Catalan number, Raney number と呼ばれるものと一致している ([7], [9])。また, (2) の  $s = 0$  の場合については, 著者による組合せ論的手法を用いた証明も存在する (cf. [8])。

本稿の目的である  $C_n(m, s)$  の合成積については次が成立する。

**Proposition 2.2.**  $r, m \geq 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{C}$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r \frac{(a)_{(m+1)i_k}}{i_k!(a+1)_{mi_k}} = \frac{(ar)_{(m+1)n}}{n!(ar+1)_{mn}}. \quad (8)$$

特に,  $a = s + 1$  ( $s \geq 0$ ) とすると

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r C_{i_k}(m, s) = C_n(m, r(s+1) - 1). \quad (9)$$

まず, 次が成立する。

**Lemma 2.3.**  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $m \geq 1$ ,  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (a)_{(m+1)k} (b)_{mk}}{k! (a+1)_{mk} (b-n+1)_{(m+1)k}} = \frac{(b-a+mn)(a-b+1)_{n-1}}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}}. \quad (10)$$

特に, (10) を超幾何級数で記載すると

$${}_{2m+2}F_{2m+1} \left( \begin{matrix} -n, \frac{a}{m+1}, \frac{a+1}{m+1}, \dots, \frac{a+m}{m+1}, \frac{b}{m}, \frac{b+1}{m}, \dots, \frac{b+m-1}{m} \\ \frac{a+1}{m}, \frac{a+2}{m}, \dots, \frac{a+m}{m}, \frac{b-n+1}{m+1}, \frac{b-n+2}{m+1}, \dots, \frac{b-n+m+1}{m+1} \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(b-a+mn)(a-b+1)_{n-1}}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}}. \quad (11)$$

**Proof.** まず, 次の等式が知られている (cf. [2], [3])。

$${}_{2m+2}F_{2m+1} \left( \begin{matrix} -n, \frac{a}{m+1}, \frac{a+1}{m+1}, \dots, \frac{a+m}{m+1}, \frac{b}{m}, \frac{b+1}{m}, \dots, \frac{b+m-1}{m} \\ \frac{a+1}{m}, \frac{a+2}{m}, \dots, \frac{a+m}{m}, \frac{b-n}{m+1}, \frac{b-n+1}{m+1}, \dots, \frac{b-n+m}{m+1} \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(a-b+1)_n}{(1-b)_n}, \quad (12)$$

$${}_{2m+2}F_{2m+1} \left( \begin{matrix} -n, \frac{a}{m+1}, \frac{a+1}{m+1}, \dots, \frac{a+m}{m+1}, \frac{b}{m}, \frac{b+1}{m}, \dots, \frac{b+m-1}{m} \\ \frac{a}{m}, \frac{a+1}{m}, \dots, \frac{a+m-1}{m}, \frac{b-n+1}{m+1}, \frac{b-n+2}{m+1}, \dots, \frac{b-n+m+1}{m+1} \end{matrix}; 1 \right) = -\frac{(a-b)_n}{(b+mn)(1-b)_{n-1}}. \quad (13)$$

また, 次はよく知られた隣接 3 項間関係式である (cf. [5] の (2.8) 式)。

$$\begin{aligned} & {}_{r+2}F_{r+1} \left( \begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_{r+1} \\ b, c, d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \end{matrix}; z \right) \\ &= \frac{c-1}{c-b} \cdot {}_{r+2}F_{r+1} \left( \begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_{r+1} \\ b, c-1, d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \end{matrix}; z \right) - \frac{b-1}{c-b} \cdot {}_{r+2}F_{r+1} \left( \begin{matrix} a_0, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b-1, c, d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \end{matrix}; z \right). \end{aligned} \quad (14)$$

したがって, (14) において,  $a_0 = -n$ ,  $(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}) = (\frac{a}{m+1}, \frac{a+1}{m+1}, \dots, \frac{a+m}{m+1}, \frac{b}{m}, \frac{b+1}{m}, \dots, \frac{b+m-1}{m})$ ,  $(b, c) = (\frac{a+m}{m}, \frac{b-n+m+1}{m+1})$ ,  $(d_1, d_2, \dots, d_{r-1}) = (\frac{a+1}{m}, \frac{a+2}{m}, \dots, \frac{a+m-1}{m}, \frac{b-n+1}{m+1}, \frac{b-n+2}{m+1}, \dots, \frac{b-n+m}{m+1})$ ,  $z = 1$  と置き換えて, (12), (13) を利用すると (11) が得られる。□

**Remark 2.4.** 既知の等式を利用せずに, 直接 (10) を証明するためには, 例えば

$$F_n(a, b, m; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (a)_{(m+1)k} (b)_{mk} z^k}{k! (a+1)_{mk} (b-n+1)_{(m+1)k}}$$

とおき,  $n \geq 1$  に対して成立する次の等式を利用して,  $n$  についての帰納法で示す方針も考えられる。

$$\begin{aligned} F_n(a, b, m; z) &= -\frac{a(m+1)(a-b+n-2)}{(a+m)(b-n+1)} F_{n-1}(a-1, b, m; z) \\ &\quad + \frac{(a-1)(a(m+1)-(b-n+1)m)}{(a+m)(b-n+1)} F_{n-1}(a, b, m; z) \\ &\quad - \frac{az(a+(m+1)n-1)(b)_m}{(a+m)(b-n+1)_{m+1}} F_{n-1}(a+m, b+m, m; z). \end{aligned} \quad (15)$$

なお, (15) については, 両辺の  $z^k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) の係数の一致が

$$\begin{aligned} & (a+m)(a+(m+1)k-1)(b-n+1+(m+1)k)n \\ &= (a-1)(a+mk)(a-b+n-2)(k-n)(m+1) \\ &\quad - (a-1)(a+(m+1)k-1)(a+(a-b+n-1)m)(k-n) \\ &\quad + (a+m)(a+(m+1)n-1)(b-n+1+(m+1)k)k \end{aligned}$$

を利用することで, 比較的容易に証明できる。

さらに, (8) の証明の鍵となる等式を示す。以下, (8) の右辺を  $G_n(m, a, r)$ , i.e.

$$G_n(m, a, r) = \frac{(ar)_{(m+1)n}}{n!(ar+1)_{mn}}$$

とおく。

**Lemma 2.5.**  $r \geq 2, 1 \leq u \leq r-1, n \geq 0$  に対して

$$\sum_{k=0}^n G_k(m, a, u) G_{n-k}(m, a, r-u) = G_n(m, a, r). \quad (16)$$

*Proof.* (16) の左辺を直接計算し, (10) において,  $(a, b)$  を  $(au, -a(r-u) - mn)$  と置き換えた等式を利用すると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n G_i(m, a, u) G_{n-i}(m, a, r-u) \\ &= \frac{(a(r-u))_{(m+1)n}}{n!(a(r-u)+1)_{mn}} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (au)_{(m+1)k} (-a(r-u) - mn)_{mk}}{k! (au+1)_{mk} (-a(r-u) - (m+1)n+1)_{(m+1)k}} \\ &= \frac{(a(r-u))_{(m+1)n}}{n!(a(r-u)+1)_{mn}} \times \frac{r(ar+mn+1)_{n-1}}{(r-u)(a(r-u)+mn+1)_{n-1}} \\ &= \frac{(ar)_{(m+1)n}}{n!(ar+1)_{mn}} = G_n(m, a, r) \end{aligned}$$

となり成立する。  $\square$

以上の準備の下で, (8) を示す。

**Proof of Proposition 2.2.**  $r$  についての帰納法で示す。 $r=1$  のときには両辺ともに  $C_n(m, s)$  となり成立している。 $r-1$  まで成立したと仮定する ( $r \geq 2$ )。このとき, 帰納法の仮定と (16) から

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r \frac{(a)_{(m+1)i_k}}{i_k!(a+1)_{mi_k}} &= \sum_{i=0}^n \frac{(a)_{(m+1)i}}{i!(a+1)_{mi}} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{r-1}=n-i \\ i_1, i_2, \dots, i_{r-1} \geq 0}} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{(a)_{(m+1)i_k}}{i_k!(a+1)_{mi_k}} \\ &= \sum_{i=0}^n G_i(m, a, 1) G_{n-i}(m, a, r-1) = G_n(m, a, r) \end{aligned}$$

となり成立する。  $\square$

**Corollary 2.6.**  $m \geq 1, r \geq 1, a \in \mathbb{C}$  に対して

$${}_{m+1}F_m \left( \frac{a}{m+1}, \frac{a+1}{m+1}, \dots, \frac{a+m}{m+1}; \frac{a+1}{m}, \frac{a+2}{m}, \dots, \frac{a+m}{m}; z \right)^r = {}_{m+1}F_m \left( \frac{ar}{m+1}, \frac{ar+1}{m+1}, \dots, \frac{ar+m}{m+1}; \frac{ar+1}{m}, \frac{ar+2}{m}, \dots, \frac{ar+m}{m}; z \right). \quad (17)$$

**Proof.** (17) の  $z$  を  $\frac{(m+1)^{m+1}z}{m^m}$  と置き換えた等式の  $z^n$  ( $n \geq 0$ ) の係数の一致が, (8) を用いて示すことができるので, 結果的に (17) が成立する。  $\square$

また, (8) の  $(a, m)$  に特別な値を代入することで, 既知の結果を含む次が系として容易に得られる。

**Corollary 2.7.**  $n \geq 0, r \geq 1$  とする。

(i)

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r \binom{2ik}{i_k} = \frac{4^n \binom{r}{2}_n}{n!}. \quad (18)$$

(ii)

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r C_{2i_k} = \frac{2^{2n-1} r \binom{r}{2}_n}{n!}. \quad (19)$$

(iii) (= (1))

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r C_{i_k} = \frac{r(2n+r-1)!}{n!(n+r)!} = C_n(1, r-1). \quad (20)$$

**Proof.**  $n \geq 0$  に対して

$$G_n(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad G_n(1, \frac{1}{2}, 1) = \frac{C_{2n}}{4^n}, \quad G_n(1, 1, 1) = C_n$$

となることが容易にわかる。したがって,  $G_n(m, a, 1) = \frac{(a)_{(m+1)n}}{n!(a+1)_{mn}}$  であることから, (8) において,  $(m, a)$  を  $(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (1, 1)$  と置き換えて整理することにより成立が示せる。□

**Remark 2.8.** (19) において,  $r = 2$  のときには [7] の Addition Problem A33 (a) に掲載された

$$\sum_{i=0}^n C_{2i} C_{2n-2i} = 4^n C_n \quad (21)$$

が得られる。

## 参考文献

- [1] E. Catalan, “Sur les nombres de Segner”, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1 (1887), 190-201.
- [2] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/03/01/05/0017/>
- [3] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/03/01/05/0018/>
- [4] T. Koshy, Catalan Numbers with Applications, Oxford University Press, 2009.
- [5] C. Krattenthaler, “A Systematic List of Two- and Three-term Contiguous Relations for Basic Hypergeometric Series”, available at <http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/contrel.html>
- [6] A. Regev, “A proof of Catalan’s convolution formula”, Integers, Electronic Journal of Combinatorial Numbers Theory, 12 (2012), #A29.
- [7] R. P. Stanley, Catalan numbers, Cambridge Univ. Press, 2015.
- [8] 田川裕之, “カタラン数の拡張とその応用”, 「数学若手の会」会報 46 号 (1990), 19-34.
- [9] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fuss%E2%80%93Catalan\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Fuss%E2%80%93Catalan_number)